**Reelle Algebra und Einführung**
**in die o-Minimalität**
Blatt 9
**Letztes Blatt!**
Abgabe: 23.07.2020, 11Uhr

**Aufgabe 1** (15 Punkte)**.**
Die Sprache $\mathcal{L}$ enthält ein zweistelliges Funktionszeichen $\star$ und ein zweistelliges Relationszeichen $<$ derart, dass die $\mathcal{L}$-Strutur $\mathcal{M}$ o-minimal bezüglich der linearen Ordnung $<^{\mathcal{M}}$ ist und die Verknüpfung $\star^{\mathcal{M}}$ eine kompatible Gruppenoperation auf $M$ bildet:

$$x <^{\mathcal{M}} y \Longrightarrow x \star^{\mathcal{M}} z <^{\mathcal{M}} y \star^{\mathcal{M}} z \quad \& \quad z \star^{\mathcal{M}} x <^{\mathcal{M}} z \star^{\mathcal{M}} y \text{ für alle } x, y \text{ und } z \text{ in } M.$$

Eine Teilmenge $X$ von $M$ heißt *konvex*, falls für alle $b$ in $M$ im offenen Intervall $(a_1, a_2)$ mit $a_1$ und $a_2$ aus $X$, das Element $b$ bereits in $H$ ist.

a) Zeige, dass eine Untergruppe $H$ von $M$ genau dann konvex ist, wenn $H$ jedes positive Element aus $M$ enthält, welches kleiner als ein Element aus $H$ ist.

b) Zeige, dass jede definierbare Untergruppe von $M$ konvex ist.

   **Hinweis:** Kann es eine aufsteigende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $M$ so geben, dass $a_n$ genau dann in der definierbaren Menge $X$ liegt, wenn $n$ gerade ist?

c) Beschreibe alle definierbaren Untergruppen von $M$.

   **Hinweis:** Wenn $H$ eine echte definierbare Untergruppe ist, dann besitzt $H$ ein Maximum.

d) Schließe daraus, dass $M$ abelsch, torsionsfrei und teilbar ist.

e) Zeige, dass die Ordnung auf $M$ dicht ist.

---

Die Übungsblätter können zu zweit eingereicht werden (Bitte alle Namen eintragen!) Abgabe der Übungsblätter im ILIAS als eine einzige PDF-Datei.